

Reinhard Winkler
TU Wien

Im Anfang war die Exponentialfunktion

Der "Prolog" zu Walter Rudins berühmtem (und großartigem) Lehrbuch "Real and Complex Analysis" ist ausschließlich der Exponentialfunktion \exp (zur Basis e) gewidmet und beginnt mit dem Satz: "This is the most important function in mathematics." Es folgen die Definition von \exp und - sehr schnell - die grundlegenden Eigenschaften (Funktionalgleichung, Ableitung u.ä.). Sodann werden mittels \exp die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus definiert sowie ihre elementaren Eigenschaften hergeleitet.

Dieser elegante Zugang erfolgt allerdings über die Potenzreihendarstellung von \exp und verwendet manches über Potenzreihen. Das ist im Schulunterricht natürlich nicht möglich. Im Unterricht wird man daher einen elementareren Zugang wählen.

Zunächst geht es um die Definition allgemeiner Potenzen mit einer beliebigen Basis $a > 0$. Dabei verallgemeinert man schrittweise die erlaubten Exponenten, von natürlichen über ganze und rationale bis hin zu reellen. (Komplexe Exponenten wollen wir zunächst nicht betrachten.)

In meinem Vortrag will ich diesen Weg ausführlich beschreiben. Obwohl relativ elementar, genügt dieser Zugang hinsichtlich mathematischer Strenge selbst den höchsten Ansprüchen und liefert, teils als Nebenprodukt, auch alle grundlegenden Eigenschaften von \exp . Dabei zeigt sich, dass die Rolle der Zahl e erst über die Differentialrechnung angemessen gewürdigt werden kann. (Daher hat es meiner Meinung nach auch wenig Sinn, die Zahl e schon früher einzuführen.)

Hat man die Funktion \exp einmal zur Verfügung, steht man – ganz im Sinne des Vortragstitels – unmittelbar vor dem Durchbruch; sowohl zu allen wichtigen elementaren Funktionen, als auch beispielhaft zu wesentlichen Aspekten der Analysis schlechthin.